

Prof. Dr. Alfred Toth

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel?

1. Einer weit verbreiteten Auffassung zufolge kann man nur qualitativ gleiche Objekte addieren. Allerdings bleibt das Wort "gleich" stets undefiniert. Einem letztlich auf Hegel zurückgehenden Satz zufolge gilt somit, wie man bereits auf der Schule lernt,

1 Apfel + 1 Apfel = 2 Äpfel,

1 Apfel + 1 Birne = 2 Früchte,

denn im Gültigkeitsbereich der aristotelischen zweiwertigen Logik, auf der bekanntlich die klassische Arithmetik beruht, werden Qualitäten auf die "eine Qualität der Quantität" reduziert.

2. Logisch kann man Gleichheit als eine abgeschwächte Form von Identität definieren. Stimmen zwei Objekte in allen ihren Merkmalen überein, liegt Identität vor. Damit haben wir es aber nur mit einem einzigen Objekt zu tun. Es stellt sich die Frage, wie man in der klassischen Arithmetik die Selbstaddition definiert. Unterscheiden sich zwei Objekte somit nur schon in einem einzigen Merkmal, so sind sie entweder gleich oder verschieden, und wir haben es also erst vom Fehlen mindestens eines Merkmals mit zwei Objekten zu tun. Gleichheit setzt also im Gegensatz zu Identität nicht nur Präsenz, sondern auch Absenz voraus. Die Addition von zwei Äpfeln setzt somit voraus, daß wir trotz ihrer Nicht-Identität zwei Objekte der gleichen Objektfamilie zuweisen können. Wie man allerdings aus Experimenten der Kognitionspsychologie weiß, sind die Übergänge von gleichen zu verschiedenen Objekten oft fließend. Beispielsweise kann man Gläser und Tassen nahtlos ineinander übergehen lassen. Ferner gibt es eine nicht zu kleine Menge von Objekten, deren Ähnlichkeit zu Objekten bestimmter Objektfamilien Gleichheit suggeriert, wo Verschiedenheit vorliegt. Dazu gehören etwa die Süßkartoffel, die Alpenrose oder der im folgenden abgebildete Java- oder Wachsapfel.



Wachsapfel

Wie lautet also die korrekte Lösung der Addition?

$$1 \text{ Apfel} + 1 \text{ Apfel} = 2 \text{ Äpfel}$$

oder

$$1 \text{ Apfel} + 1 \text{ Apfel} = 2 \text{ Früchte.}$$

3. Weitere Probleme im Zusammenhang mit den fließenden Übergängen zwischen Gleichheit und Verschiedenheit ergeben sich aus den folgenden Gleichungen.

$$1 \text{ Jonathan-Apfel} + 1 \text{ Gala-Apfel} = \textcircled{1}$$

$$1 \text{ Jonathan-Apfel} + 1 \text{ Boskoop-Apfel} = \textcircled{2}$$

$$1 \text{ Jonathan-Apfel} + 1 \text{ Golden Delicious-Apfel} = \textcircled{3}$$

...

Da es sich stets um Äpfel handelt, haben wir zwei Möglichkeiten: Entweder alle diese Gleichungen haben ein und dasselbe Resultat, nämlich "2 Äpfel", oder aber, der Wechsel der Qualitäten der Summanden schlägt sich in den Summen nieder, und wir bekommen

$$\textcircled{1} \neq \textcircled{2} \neq \textcircled{3} \neq \dots$$

Da nicht nur Äpfel als solche, d.h. als Elemente einer bestimmten Klasse, i.e. der Objektfamilie "Apfel", erkennbar sind, sondern da sie auch in ihrer jeweiligen Verschiedenheit innerhalb ihres Apfel-Seins – und selbst für Subjekte,

welche die Namen der verschiedenen Apfel-Sorten nicht kennen - erkennbar sind, gilt offenbar die letzte Kette von Ungleichungen. Nun handelt es sich hier um rein qualitative Ungleichungen, bei denen die Quantität konstant bleibt (es handelt sich immer um 2 Objekte). Will man neben der Qualität auch die Quantität verändern,

$$1 \text{ Jonathan-} + 1 \text{ Gala-Apfel} = \textcircled{1}$$

$$1 \text{ Jonathan-} + 1 \text{ Gala-} + 1 \text{ Boskoop-Apfel} = \textcircled{2}$$

$$1 \text{ Jonathan-} + 1 \text{ Gala-} + 1 \text{ Boskoop-} + 1 \text{ Gravensteiner-Apfel} = \textcircled{3}$$

$$1 \text{ Jonathan-} + 1 \text{ Gala-} + 1 \text{ Boskoop-} + 1 \text{ Gravensteiner-} + 1 \text{ Grün-Apfel} = \textcircled{4}$$

...,

kann man gemischte qualitativ-quantitative Gleichungen wie die folgenden aufstellen

$$\textcircled{2} \neq \textcircled{3} \neq \textcircled{4}$$

Selbstverständlich gilt ferner

$$(\textcircled{1} \neq \textcircled{2} \neq \textcircled{3} \neq \dots) \neq (\textcircled{2} \neq \textcircled{3} \neq \textcircled{4}).$$

Literatur

Kronthaler, Engelbert, Grundlegung einer Mathematik der Qualitäten.
Frankfurt am Main 1986

Toth, Alfred, Äpfel und Birnen. 2 Bde. Tucson 2010

20.2.2014